



# Komplexe Netzwerke

## Einführung

Dr. Matthias Scholz

[www.network-science.org/SS2009.html](http://www.network-science.org/SS2009.html)

## 1 Komplexe Netzwerke

Fachübergreifendes Gebiet: Physik, Mathematik, Informatik, Biologie, Soziologie

### 1.1 Beispiele realer komplexer Netzwerke

- **Soziale Netzwerke:** Kommunikation und Kooperation in einer Gesellschaft
- **Kommunikationsnetzwerke:** Telekommunikation (Wer telefoniert mit wem?), Email-Kontakte, Online Kontakt(Freundschafts)-Netzwerke (Facebook, StudiVZ, Xing)
- **Kooperationsnetzwerke:** Schauspieler (im selben Film), Koautoren (Publikationen)
- **Informationsnetzwerke:** Linkstruktur im WWW, Zitierungsnetzwerk von Publikationen
- **Biologie:** Protein-Protein-Interaktionsnetz, Neuronales Netz
- **Transportnetze:** Straßennetz, Stromnetz, Internet

Ein **reales komplexes Netzwerk** ist ein komplexes System bestehend aus einzelnen Elementen (Personen, Computer oder Moleküle) und Verbindungen oder Beziehungen zwischen ihnen (Freundschaften, Vernetzungen oder Interaktionen)

Reale komplexe Netzwerke sind natürlich gewachsene bzw. nach Bedarf entstandene Netzwerke (nicht zentral geplant).

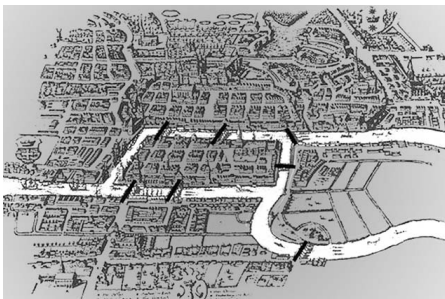
### 1.2 Die populärsten Beobachtungen (Netzwerk-Eigenschaften):

- **Universelle Strukturen:** Reale Netzwerke aus den verschiedensten Bereichen weisen häufig sehr ähnliche Eigenschaften und Strukturen auf.

- **Skalenfreiheit** (*scale-free*): Kontakte pro Knoten sind ‘ungleich’ verteilt: Viele Knoten sind nur schwach vernetzt, wenige Knoten sind extrem stark vernetzt (→ Potenzgesetz (*power-law*), polynomieller Zusammenhang).
- **Kleine-Welt-Phänomen** (*small world phenomenon*): Die durchschnittliche Weglänge zwischen zwei Knoten ist sehr kurz im Vergleich zur Größe eines Netzwerkes und der typischerweise geringen Gesamtvernetzung.

## 2 Königsberger Brückenproblem (1736)

reale Welt  
(Brücken-Netzwerk)



Modell  
(Graph)

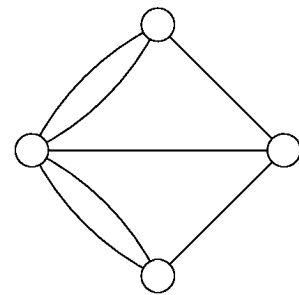


Abbildung 1: Gibt es einen Weg, bei dem man jede Brücke exakt einmal überquert?

**Lösung** von Leonhard Euler: Problem wird als Graphen-Modell abstrahiert. Bis auf Start- und End-Knoten müssen alle Knoten einen geraden Grad (Anzahl der Kanten) haben. Für einen Rundgang, bei dem man zum Ausgangspunkt zurückkehrt, müssen sogar alle Knoten einen geraden Grad haben.

**Eulerscher Graph:** Ein zusammenhängender Graph ist genau dann eulersch, wenn der Grad jedes Knoten gerade ist.

## 3 Begriffe

**Netzwerk und Graph** Das mathematische Modell realer netzwerkartiger Systeme wird in dem Gebiet der komplexen Netzwerke sowohl als *Netzwerk* als auch als *Graph* bezeichnet. Der Grund für die unterschiedliche Bezeichnung liegt in dem fächerübergreifenden Charakter der Gebietes. *Graph* ist die traditionelle Bezeichnung in der Mathematik (Graphentheorie). In der Physik, Biologie und Soziologie wird meist nur der Begriff *Netzwerk* verwendet.

In dieser Vorlesung benutzen wir die Bezeichnungen wie folgt:

**Graph** ist ein mathematische Modell, bestehend aus Knoten und Kanten

**Netzwerk** ist ein reales System (aus Elementen und Verbindungen/Beziehungen zwischen ihnen), welches sich mit Graphen beschreiben lässt.

Ein Graph dient als mathematisches Modell eines realen komplexen Netzwerkes.

**Modell:** Ein Modell ist eine stark vereinfachte Beschreibung realer Systeme (Abstraktion). Probleme können am Modell einfacher gelöst werden als am realen System, da nur die für eine Fragestellung relevanten Eigenschaften im Modell enthalten sind. Beispiel Königsberger Brückenproblem: wie weit die Brücken von einander entfernt sind oder wie lang sie sind, sind Eigenschaften die zum Lösen des Problems nicht benötigt werden und daher weggelassen werden können.

**Komplexes System** Systeme oder Objekte bezeichnet man als *komplex*, wenn sich deren Verhalten nicht aus dem Wissen über die Funktion seiner Teile vorhersagen lässt. Wir betrachten ein System in seiner Gesamtheit:

*Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile.*

Aristoteles (384 – 322 v. Chr.)

Beispiel Neuronales Netz: Obwohl die Funktion von Nervenzellen gut verstanden ist, wissen wir heute nur wenig darüber, wie das Gehirn als Ganzes funktioniert.

Komplexe Systeme zeigen häufig unerwartete Effekte: unerwartetes Verhalten des Gesamtsystems (plötzlicher Zustandswechsel → Phasenübergang).

## 4 Komplexe Netzwerke und Graphentheorie

### 4.1 Graphentheorie

- eher statische Betrachtung: als Karte (Topologie)
- typische Fragestellungen:
  - kürzester Weg von A nach B
  - Problem des Handelsreisenden (Hamiltonsche Graphen)
  - Vier Farben Problem

### 4.2 Komplexe Netzwerke

- Netzwerk als komplexes dynamisches System: Knoten repräsentieren dynamische Einheiten, die ihre eigenen Verhaltensregeln haben, Kanten repräsentieren die Kopplung zwischen diesen Einheiten.
- dynamische Betrachtung (Netzwerk als ein sich ständig änderndes System)
  - Anzahl der Elemente (Veränderung der Größe des Netzes)
  - Anzahl und Anordnung der Verbindungen (Veränderung der Vernetzung)
- Fragen betreffen die Veränderung (Dynamik) realer Netzwerke:
  - Wie entstehen Netzwerke?

- Was passiert wenn sich die Vernetzung ändert? (Robustheit).  
 Wie breiten sich Informationen oder Viren aus?  
 siehe auch Abschnitt 5 'Schlüsselfragen'  
 - starke Ausrichtung auf die empirische Auswertung von realen (komplexen) Netzwerken

## 5 Schlüsselfragen (Ursachen/Bedeutung/Nutzen von komplexen Netzwerken)

**Eigenschaften:** Wie beschreibt/charakterisiert man sehr große Netzwerke?

- Gradverteilung der Knoten
- durchschnittliche Weglänge zwischen zwei Knoten
- Cluster-Struktur

Ziel: Vergleich von Netzwerken, Schlussfolgerungen (z.B.: Robustheit)

**Schlussfolgerungen:** Wenn die Netzwerkstruktur bekannt ist, was kann man daraus ableiten? Beispiele:

<i>Eigenschaft</i>	<i>Schlussfolgerung</i>
kurze Distanzen (kleine Welt) skalenfrei	Verbreitung (Information, Virus) ist sehr schnell robust gegenüber zufälligen Knoten-Ausfall, aber leicht angreifbar durch gezielte Attacken (Angriff auf stark vernetzte Knoten)
starke Cluster-Struktur	lokale Funktionalität, modulartige Organisation

**Universelle Strukturen:** Gibt es universelle Strukturen und Regeln, die für viele (natürliche als auch technische) Netzwerke gelten?

Netzwerke aus unterschiedlichsten Bereichen haben häufig sehr ähnliche Eigenschaften. Das lässt Vermuten, dass Netzwerke oft nach ähnlichen Mechanismen, Gesetzen oder Regeln funktionieren. Diese herauszufinden, ist das Ziel des Forschungsgebietes der komplexen Netzwerke.

**Modelle:** Kann man mit mathematischen Modellen die beobachteten Eigenschaften reproduzieren?

Wie können bestimmte Netzwerkstrukturen erzeugt werden? Nach welchen Regeln?  
 Wie gut sind die einzelnen Netzwerk-Modelle und was kann man daraus ableiten?

**Diagnose von Netzwerken (Robustheit):** Kritischer Zustand: Bei Ausfall von wieviel Prozent der Knoten fällt das Netz auseinander (in nicht zusammenhängende Teilnetze)?  
 Beispiele: Internet (Knotenausfall), Fehlfunktion von Molekülen in biologischen Netzen (Knotenausfall), Überlast im Stromnetz (Ausbreitung von Störungen)

**Soziale Netzwerke:** Wovon hängen Konflikte in einer Gesellschaft ab? Vergleich von Gesellschaftsstrukturen: Grad der Vernetzung, Cluster- bzw. Gruppenbildung.

**Informationsfluss:** Wie entstehen soziale Bewegungen? Wie kommt es, dass sich bestimmte Nachrichten schlagartig ausbreiten, andere wiederum nicht?

Es sind oft grundlegende Fragen an komplexe Systeme, die man hier aus Sicht der Netzwerke zu lösen und zu verstehen versucht.

## 6 Literatur

- Mark Newman. **The structure and function of complex networks**. SIAM REVIEW 45 (2): 167-256 (<http://aps.arxiv.org/abs/cond-mat/0303516>)
- Mark Newman, Albert-László Barabási, and Duncan J. Watts. **The Structure and Dynamics of Networks**. 2006.
- weitere Bücher über komplexe Netzwerke, siehe: [www.network-science.org](http://www.network-science.org)
- **Graphentheorie:**  
Reinhard Diestel. Graphentheorie. Springer-Verlag, Berlin, 2006.  
<http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graphentheorie/GraphentheorieIII.pdf>
- **Soziologie (Netzwerkanalyse):** Dorothea Jansen. Einführung in die Netzwerkanalyse. 3. Auflage, 2006.